Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
3ème année LICENCE
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires.

Dr N. BELLAL
n.bellal@univ-skikda.dz
2016/2017

Série de TD N° 1

Solutions (exercice 4):

1)

Soit $E = C\left(\left[-1,\ 1\right],\ \mathbb{C}\right)$, espace des fonctions continues sur $\left[-1,\ 1\right]$, muni de la norme $\|.\|_1$ tel que :

$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$

$\left(E,\ \|.\|_1\right)$ est un espace vectoriel normé (facile à vérifier). Mais $\left(E,\ \|.\|_1\right)$ n'est pas complet. C'est-à-dire

Il existe $(f_n) \subset E$. (f_n) est de Cauchy dans $\left(E,\ \|.\|_1\right)$

$\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$

Mais $f \notin E$

En effet

Considérons la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[-1,\ 0\right] \\ nx \text{ si } x \in \left[0,\ \frac{1}{n}\right] \\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n},\ 1\right] \end{cases} \tag{4.1}$$

Il est clair que $(f_n) \subset E$

On montre que f_n est de Cauchy dans $\left(E,\ \|.\|_1\right)$:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p,\ q :\ p > q > n_0$ on a: $\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon$

$\forall p,\ q :\ p > q$ on a: $\|f_p - f_q\|_1 = \int_{-1}^{1} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| dx$

$= \int_{-1}^{0} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| dx + \int_{0}^{\frac{1}{p}} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| dx$

$$+ \int_{\frac{1}{p}}^{\frac{1}{q}} \left| f_p(x) - f_q(x) \right| dx + \int_{\frac{1}{q}}^{1} \left| f_p(x) - f_q(x) \right| dx$$
$$= \int_{-1}^{0} |0 - 0|\, dx + \int_{0}^{\frac{1}{p}} \left| px - qx \right| dx + \int_{\frac{1}{p}}^{\frac{1}{q}} \left| 1 - qx \right| dx + \int_{\frac{1}{q}}^{1} \left| 1 - 1 \right| dx$$

Remarque 1

Ici $x \in \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right]$ donc si $x > \frac{1}{p}$ alors $f_n(x) = 1$ et si $x < \frac{1}{q}$ alors $f_n = qx$.

(voir (4.1))

On trouve alors
$\|f_p - f_q\|_1 \to 0$
Ainsi (f_n) est une suite de Cauchy dans $\left(E, \|.\|_1\right)$
On calcule la limite de la suite
$\forall x \in [-1, 0], \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
$\forall x \in]0, 1]$, (f_n) est croissante et on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.
C'est-à-dire

$$\forall x \in [-1, 1], \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ 1 \text{ si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Remarque 2

- La limite simple f doit exister sinon on peut pas parler de convergence ou non convergence par rapport à une norme d'une suite (f_n) dans E.
- La limite $f \notin E$ (car f n'est pas continue en 0).
- On doit vérifier que (f_n) converge avec $\|.\|_1$ vers une limite f, mais cette limite n'est pas dans E

On suppose que $\exists g \in E : \|f_n - g\|_1 \underset{n \to +\infty}{\to} 0$
On montre que $g = 1$
C'est-à-dire On montre que $g(x) = 1 \ \forall x \in]0, 1]$.

Remarque 3

$\forall x \in [-1, 0]$, on a rien à montrer car la suite est nulle

On raisone par l'absurde
On suppose que $\left(\exists g \in E : \|f_n - g\|_1 \underset{n \to +\infty}{\to} 0\right)$ et $(g \neq 1)$.
donc on peut trouver $x_0 \in]0, 1]$ tel que $g(x_0) \neq 1$

Comme g est supposé continu sur $]0, 1]$ il existe un voisinage noté V_{x_0}, $V = [a, b] \subset]0, 1]$ $(b > a)$, et il existe un nombre $C > 0$ tels que
$\forall x \in V_{x_0}\ :\ |g(x) - 1| \geq C.$
Si on choisie $a \geq \frac{1}{n}$ c'est-à-dire $n \geq \frac{1}{a}$, on a $f_n = 1$ sur V_{x_0}, d'où

$$\|f_n - g\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - g(t)|dt \overset{V_{x_0} \subset [-1, 1]}{\geq} \int_{V_{x_0}} |f_n(t) - g(t)|dt$$
$$= \int_{V_{x_0}} |1 - g(t)|dt \geq \int_{V_{x_0}} Cdt = C\,(b - a) > 0,$$

D'où la contradiction avec $\left(\|f_n - g\|_1 \underset{n \to +\infty}{\to} 0\right)$. L'espace E est donc non-complet pour cette norme.

Remarque 4

Le voisinage V_{x_0} et la constante C peuvent êtres déterminer à partir de la définition de la continuité de g comme on va le voir en détail dans l'exercice 5.

2) On utilise la question 3 de l'exercice 1 de cette série :

On montre qu'il existe une série absolument convergente mais non convergente dans E.

On pose $g_n = f_{n+1} - f_n$ tel que (f_n) est définie dans (4.1) et on montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_1 < \infty$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ n'est pas convergente.

On calcule $\|g_n\|_1 = \|f_{n+1} - f_n\|_1 = \frac{1}{2n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1$ est convergente, en effet comme $\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n(n+1)}$ alors on peut comparer la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1$ à une série de Riemann qui est convergente $(\alpha = 2 > 1)$ ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1$ est convergente.

On vérifie que

$$\sum_{k=1}^{n-1} g_k = f_n - f_1 \Rightarrow f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

Comme (f_n) n'est pas convergente dans E donc $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ n'est pas convergente.

Remarque 5

Il existe une série absolument convergente mais non convergente dans E car l'espace $(E, \|.\|_1)$ n'est pas complet et ceci d'après l'exercice 1.

Solutions (exercice 5)

Remarque 6

Cet exercice est semblable à l'exercice précédent, à cet effet on a détaillé uniquement les passages importants qui non pas été vu dans l'exercice 4.

1)

On note $E = C([-1,\ 1],\ \mathbb{C})$, on définit sur E l'application suivante:

$$\phi(f,\ g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\ dx$$

Il est facile de vérifier que ϕ définie un produit scalaire sur E :

On vérifie que $\phi(f,\ f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

En effet

On a $\phi(f,\ f) = 0,$ alors la fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ est une fonction continue positive sur l'intervalle $[-1,\ 1]$. Son intégrale est nulle si et seulement si cette fonction est identiquement nulle. Donc $\phi(f,\ f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$

Comme $\|f\|_2 = \sqrt{\phi(f,\ f)}$, alors $\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur $E.$

2)

On montre que $(E,\ \|.\|_2)$ n'est pas complet. Soit la suite de fonction suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx \text{ si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

a)

On montre que pour $1 \le n \le p$, on a: $\|f_n - f_p\|_2 \le \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Par définition (voir (5.1)), les fonctions f_n et f_p coïncident sur les intervalles $[-1,\ -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n},\ 1]$. D'autre part, pour $x \in [-\frac{1}{n},\ 0]$, on a

$$|f_n(x) - f_p(x)| \le 1$$

Même chose pour $x \in [0,\ \frac{1}{n}]$. On obtient donc

$$\|f_n - f_P\|_2 \le \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{2}{n}}\ .$$

Alors $\|f_n - f_P\|_2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

b) On suppose $\exists\, g \in E$ tel que : $\|f_n - g\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Montrons que $g(x) = 1\ \forall x \in \left]0,\ 1\right]$. Raisonnons par l'absurde:

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \left]0,\ 1\right]$ pour lequel $g\,(x_0) \neq 1$. On suppose par exemple que $g\,(x_0) > 1$, et on pose $\alpha = g(x_0) - 1 > 0$. Comme par hypothèse $g \in E$ alors g est continue en un point $x_0 \in \left]0,\ 1\right]$ donc

$\forall \varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$, $\left(\text{on peut choisir } \eta < \frac{x_0}{2}\right)$, tel que $\forall\, x \in V_{x_0} = \left[x_0 - \eta,\ x_0 + \eta\right]$ on a $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ donc $g\,(x) \geq 1 + \frac{\alpha}{2}$. Maintenant, pour tous les n suffisamment grands pour que $\frac{1}{n} < \eta$, on a $f_n(x) = 1$ dés que $x \in \left[x_0 - \eta,\ x_0 + \eta\right]$. Ceci donne alors:

$$\begin{cases} \|f_n - g\|_2^2 \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (g(x) - 1)^2 dx \\ \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \frac{\alpha^2}{4} dx \\ \quad = \frac{\eta\alpha^2}{2} \ > 0 \end{cases}$$

donc $\|f_n - g\|_2 \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$ .De la même façon, on prouve que $g\,(x) = -1$ si $x \in [-1, 0[$. La suite (f_n) ne converge pas dans $\left(E,\ \|.\|_2\right)$, et donc cet espace n'est pas complet.

Remarque 7

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f\,(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in \left[-1,\ 0\right[\\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \in \left]0,\ 1\right] \end{cases}$$

La limite $f \notin E$ (car f n'est pas continue en 0).